3. Линейни операции с вектори

Твърдение: Ако ν е вектор и O е точка, то съществува единствена точка P, такава че $\overrightarrow{OP} = \nu$.
Доказателство:
Нека $\overrightarrow{AB}$ е представител на ν. Ако ν=**0**, то $P \equiv O$. Нека O не е върху правата AB, то P е единствена точка, за която $ABPO$ е успоредник. Следователно $\overrightarrow{OP} = \nu$.
Ако O е върху AB, то е ясно че има единствена точка P, такава че $OP \cong AB$ и $\overrightarrow{OP} \upuparrows \overrightarrow{AB}$, т.е. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} = \nu$.

Дефиниция. 1: Нека $\overrightarrow{AB}$ е представител на ν. Тогава векторът с представител $\overrightarrow{BA}$ се нарича противоположен на ν и се бележи с $-\nu$.

Събиране на свободни вектори. *Сума* $a+b$ на два свободни вектора a, b наричаме свободния вектор, получен чрез пренасяне на a в произволна точка O, получаваме насочената отсечка $\overrightarrow{OA} = a$, в точката A пренасяме b и получаваме насочената отсечка $\overrightarrow{AB} = b$. Насочената отсечка $\overrightarrow{OB}$ определя свободен вектор, който наричаме сума на двата свободни вектора и го означаваме с $a + b$.
Ще покажем, че дефиницията не зависи от избора на точката O. Нека $O\prime$ е друга точка, $\overrightarrow{O\prime A\prime} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{A\prime B\prime} = \mathbf{b}$. Следователно $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O\prime A\prime}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\prime B\prime} \Rightarrow \overrightarrow{OO\prime} = \overrightarrow{AA\prime}$ и $\overrightarrow{AA\prime} = \overrightarrow{BB\prime}$. Следователно $\overrightarrow{OO\prime} = \overrightarrow{BB} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O\prime B\prime}$, т.е. $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{O\prime B\prime}$ дефинитрат един и същ клас н аеквивалентност и дефиницията е коректна.

Теорема. 1: Операцията събиране на свободни вектори притежава следните свойства:
1) **a**+**b**=**b**+**a**;
2) **a**+**0**=**a**;
3) **a**+(-**a**)=**0**;
4) (**a**+**b**)+**c**=**a**+(**b**+**c**);
Доказатлство:
1) Нека $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$;
Нека $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b}$ или $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$, следователно $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$. Следователно имаме $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$ или **a**+**b**=**b**+**a**;
2) Нека $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, имаме $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = \mathbf{a}+\mathbf{0}$. Следователно **a**+**0**=**a**;
3) Нека $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$. Тогава $\overrightarrow{AO} = \text{-}\mathbf{a} \Rightarrow \overrightarrow{OO} = \mathbf{a}\text{-}\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a}+(\text{-}\mathbf{a})=\mathbf{0}$;

4) Нека $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$.
Нека $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}+\mathbf{c} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.
Следователно $\overrightarrow{OC} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$=$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.
От тези свойства следва, че ако име сума на вектори $a_1, a_2, ..., a_n$, то тя не зависи от тяхната подредба или от това как са поставени скобите. Затова скобите могат да се изпуснат.

Умножение на реално число със свободен вектор Нека $\mathbf{a}$ е вектор, а $\lambda \in \mathbb{R}$. *Произведение* на $\mathbf{a}$ с λ се нарича свободния вектор $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda$, който е колинеарен с $\mathbf{a}$ и дължината му е $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$; ако $\lambda > 0$, двата вектора са еднопосочно колинеарни, ако $\lambda < 0$, двата вектора са разнопосочно колинеарни. Ако $\mathbf{a}$=0 или $\lambda = 0$, считаме че $\lambda\mathbf{a}$=$\mathbf{0}$.

Теорема. 2: Операцията умножение на реално число със свободен вектор притежава следните свойства:
5) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$;
6) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$;
7) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$;
8) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = \lambda\mu\mathbf{a}$.
Тук $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са произволни свободни вектори, а λ, μ - произволни реални числа.
Доказателство:
5) Следва от дефиницията.
6) Да предположим $\lambda > 0$, $\mu < 0$ и нека $\lambda + \mu > 0$. Аналогично се третират и останалите случаи. Нека $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \lambda\mathbf{a}$, $\overrightarrow{CD} = \mu\mathbf{a}$. Следователно $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$. Тъй като $\lambda+\mu > 0$ следва че т. D е между т. A и C. Тогава $\overrightarrow{AD} \upuparrows \overrightarrow{AB}$ и $|\overrightarrow{AD}| = |\lambda+\mu||\mathbf{a}|$, т.е. $\overrightarrow{AD} = (\lambda = \mu)\mathbf{a}$. С това 6) е доказано.
7) Нека $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$. Тогава $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$. При $\lambda > 0$ построяваме $\overrightarrow{AB_1} = \lambda\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC_1} = \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Триъгълниците ABC и AB_1C_1 са подобни. Тогава $\overrightarrow{B_1C_1} = \lambda\mathbf{b}$ и насочената отсечка $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$. С това 7) е доказано.
Аналогично при $\lambda < 0$.
8) Тук непосредствено се разглеждат случайте: $\lambda > 0, \mu > 0; \lambda < 0, \mu < 0; \lambda < 0, \mu > 0; \lambda > 0, \mu < 0$.

В множеството на свободните вектори дефинирахме операциите събиране на свободни вектори и умножение на реално число със свободен вектор. Условията 1)-8) доказват следната теорема:
Теорема. 2: Множеството на свободните вектори е векторно пространство над полето на реалните числа.

Дефиниция. 2: Векторите $a_1, a_2, ..., a_n$ наричаме *линейно зависими*, ако съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$), поне едно от които е различно от нула, такива че:

$$\lambda_1\ a_1\ +\ \lambda_2\ a_2 + ... + \lambda_n\ a_n = \mathbf{0}.$$

Ако векторите не са линейно зависими, казваме че те са линейно независими. Ако $a_1, a_2, ..., a_n$ са линейно независими и за тях е изпълнено горното равемство, то

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$$

Дефиниция. 3: Вектор **p**, за който важи представянето

$$\mathbf{p}{=}\lambda_1\ a_1 + \lambda_2\ a_2 + ... + \lambda_m\ a_m,$$

казваме че е *линейна комбинация* на векторите $a_1, a_2, ..., a_m$.
Ако $a \neq 0$, то векторът

$$\mathbf{a'}{=}\frac{\mathbf{a}}{|a|}.$$

е единиен по посоката на вектора **a**.